Mục lục

Chương 3

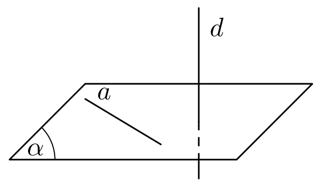
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

3.1 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

3.1.1 Tóm tắt lý thuyết

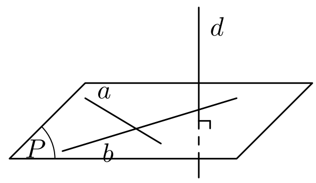
Định nghĩa 1.
Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

$$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha).$$

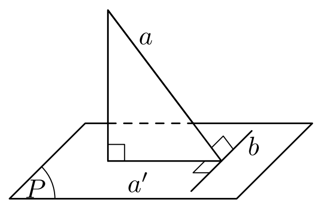


Định lí 1.
Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).

$$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a \cap b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$



Định lí 2. *(Định lí ba đường vuông góc)*
Cho đường thẳng a không nằm trong (P) đồng thời không vuông góc với (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Gọi a′ là hình chiếu vuông góc của a trên (P). Khi đó b vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với a′.



PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
Để chứng minh $a \perp b$ ta thường sử dụng những phương pháp chứng minh sau:

a) Sử dụng các phương pháp hình học phẳng: góc nội tiếp, định lí Pitago đảo, ...

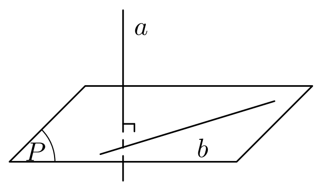
b) Sử dụng phương pháp tích vô hướng của hai véctơ, nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ thì $a \perp b$ (với $\vec{a}$, $\vec{b}$ lần lượt là hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b).

c) Sử dụng tính chất bắc cầu $\begin{cases} c \perp b \\ c \parallel a \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$

d)

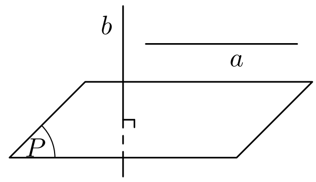
Tìm một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b. Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), thì $a \perp b$.

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$

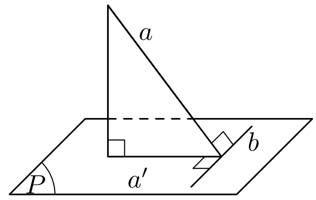


e) Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), thì suy ra $a \perp b$.

$$\begin{cases} a \parallel (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$



f) Áp dụng định lí 3 đường vuông góc: a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P), $b \subset (P)$. Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b khi và chỉ khi b vuông góc với a'. Nói ngắn gọn b vuông góc với hình chiếu thì b vuông góc với đường xiên.
Đây là phương pháp rất hay sử dụng, đọc giả phải thành thạo phương pháp này.

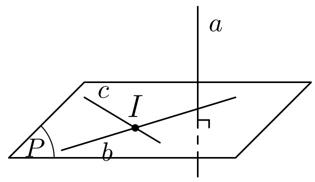


PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường sử dụng những phương pháp sau:

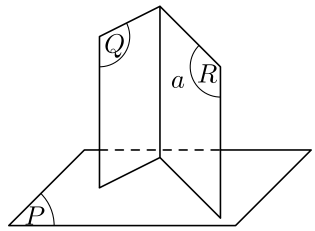
a) Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).

$$\begin{cases} a \perp b,\ a \perp c \\ b \cap c = I \\ b, c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$



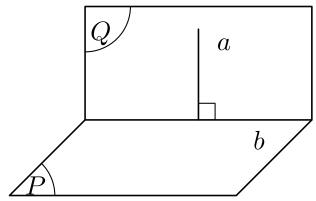
b) Hai mặt phẳng (Q) và (R) có giao tuyến a cùng vuông góc với mặt phẳng (P), thì a vuông góc với (P).

$$\begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \\ (Q) \cap (R) = a \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



c) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến b. Một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với b, thì a vuông góc với mặt phẳng (P).

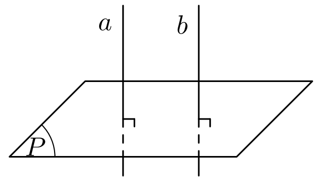
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \\ a \subset (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



d)

Chứng minh đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng a song song với b, thì suy ra a vuông góc với (P).

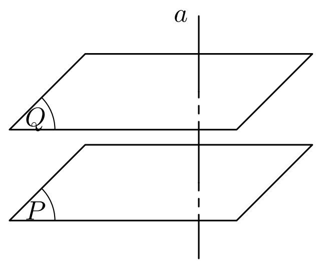
$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



e)

Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q), mặt phẳng (P) song song với (Q), nên a vuông góc với (P).

$$\begin{cases} a \perp (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



Hai vấn đề chính để giải các bài toán của dạng này:

• Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P).

• Khi đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mọi đường nằm trong (P).

3.1.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau tạo nên tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$. Chứng minh:

a) $BC \perp (SAB)$.

b) $NG \perp (SAC)$.

Bài tập 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp DM$ tại H.

a) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$ và $AC \perp SD$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trên một mặt phẳng

c) Chứng minh rằng $HK \perp (SAC)$. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.

Bài tập 7. Cho tứ diện $O.ABC$ có 3 cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh

a) $OA \perp BC, OB \perp CA, OC \perp AB$.

b) H là trực tâm của tam giác ABC.

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

d) $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

e) Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

Bài tập 8. Cho tứ diện $ABCD$, đáy là tam giác cân và $DA \perp \text{mp}(ABC)$, $AB = AC = a$, $BC = \dfrac{6a}{5}$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc với MD (H thuộc MD).

a) Chứng minh $AH \perp \text{mp}(BCD)$.

b) Cho $AD = \dfrac{4a}{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác DBC và ABC. Chứng minh $G_1G_2 \perp \text{mp}(ABC)$.

Bài tập 9. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H,K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH,SK,BC đồng quy.

b) SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

c) HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H,K là trung điểm của AB,AD.

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Bài tập 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', CD, A'D'$. Chứng minh: $MP \perp C'N$.

Bài tập 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

Bài tập 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh $MN \perp BD$.

Bài tập 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $AH \perp (ABC)$. Chứng minh rằng:

a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.

b) Gọi MM' là giao tuyến của hai (AHA') và $(BCC'B')$ trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

Bài tập 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng chéo nhau sao cho $AC \perp CF$. Gọi CH, FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh

a) ACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

Bài tập 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác cân đỉnh S. gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh $SI \perp (SCD)$, $SI \perp (SAB)$.

b) Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$ và tính độ dài SH.

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 30°$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu của S trên BM.

a) Chứng minh $AH \perp BM$.

b) Đặt $AM = x$, $0 \le x \le a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S tới BM theo a và x. Tìm x để khoảng cách này là lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 18. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $CC' = a$.

a) Gọi I trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.

c) Lấy điểm N thuộc $A'B'$ sao cho $NB' = \dfrac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$.

a) Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

b) Kẻ $AJ \perp (SBD)$. Chứng minh J là trực tâm của tam giác SBD.

Bài tập 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$. Gọi AI là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Hạ HK vuông góc với DI tại K. Chứng minh

a) $HK \perp BC$.

b) K là trực tâm của tam giác DBC.

Bài tập 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120°$, $\widehat{BSC} = 90°$, $\widehat{CSA} = 60°$.

a) Chứng minh ta giác ABC vuông.

b) Xác định hình chiếu H của S trên (ABC). Tính SH theo a.

Bài tập 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác, có ABD là tam giác đều, BCD là tam giác cân tại C có $\widehat{BCD} = 120°$, $SA \perp (ABCD)$.

a) Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

b) Gọi C' là giao điểm của SC với (AHK). Tính diện tích tứ giác $AHC'K$ khi $AB = SA = a$.

Bài tập 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $AB = SA = a$, SA vuông góc với đáy. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC, SD tại H, I, K.

a) Chứng minh $HK \parallel BD$.

b) Chứng minh $AH \perp SB$, $AK \perp SD$.

c) Chứng minh tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích $AHIK$ theo a.

Bài tập 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB, CD tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, K và L là giao điểm của SB, SD với (HIJ). Chứng minh $AK \perp (SBC)$ và $AL \perp (SCD)$.

c) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

3.2 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

3.2.1 Tóm tắt lý thuyết

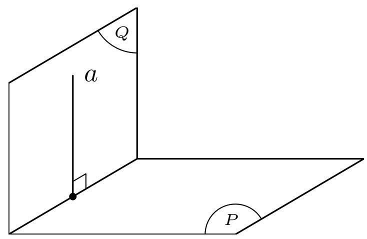
Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Các định lí và hệ quả

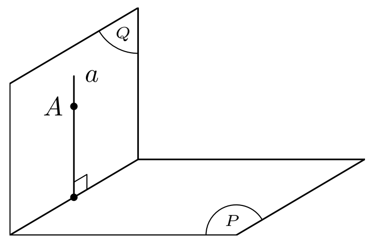
Định lí 1.
Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt thẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



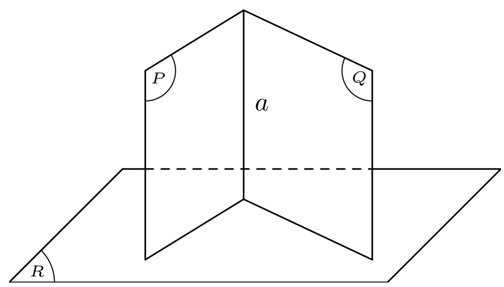
Hệ quả 1.
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (Q) thì đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với (P) sẽ nằm trong (Q).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (Q) \\ A \in a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \subset (Q).$$



Định lí 2.
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R).$$



Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Định nghĩa 2. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

a) Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác, ...

b) Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều. Ta có các loại lăng trụ đều như hình lăng trụ tam giác đều, hình lăng trụ tứ giác đều, hình lăng trụ ngũ giác đều ...

   (a) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.
   (b) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.
   (c) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là hình lập phương.

Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa 3. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

!

a) Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

b) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa 4. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Cách chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

Cách 1. Ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Cách 2. Ta chứng minh góc giữa chúng bằng $90°$.

3.2.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông tại B và $AD \perp (ABC)$. Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.

Bài tập 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ $DK \perp AC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh $(ACD) \perp (ABE)$ và $(ACD) \perp (DFK)$.

b) Chứng minh $OH \perp (ACD)$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$.

b) Chứng minh $(ABI) \perp (SBC)$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $SA = SB = SC = a$.

a) Chứng minh $(SBD) \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, có cạnh bằng a và đường chéo $BD = a$, $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$.

Bài tập 6. Cho tam giác đều ABC. Trên đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC)$ tại A lấy điểm S. Gọi D là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SBC)$.

b) Kẻ $CI \perp AB$, $CK \perp SB$. Chứng minh $SB \perp (ICK)$.

c) Kẻ $BM \perp AC$, $MN \perp SC$. Chứng minh $SC \perp BN$.

d) Chứng minh $(CIK) \perp (SBC)$ và $(BMN) \perp (SBC)$.

e) MB cắt CI tại G, CK cắt BN tại H. Chứng minh $GH \perp (SBC)$.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $ABCD$.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Từ O kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh $BC \perp (SOK)$.

c) Chứng minh $(SBC) \perp (SOK)$.

d) Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh $OH \perp (SBC)$.

Bài tập 8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Chứng minh $(SHC) \perp (SDI)$.

Bài tập 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh

a) $(SBC) \perp (SAD)$.

b) $(SAB) \perp (SAC)$.

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \dfrac{a}{2}$, $DN = \dfrac{3a}{4}$. Chứng minh $(SAM) \perp (SMN)$.

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $SB = SD = a$, $BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy

a) Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.

b) Chứng minh $(SBC) \perp (SCD)$.

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy là hình vuông $ABCD$. Gọi O là tâm của đáy, vẽ CI vuông góc với SO tại I, vẽ DH vuông góc với SB tại H. Chứng minh rằng

a) $(SAB) \perp (ADH)$.

b) $CI \perp (SBD)$.

c) $(ABE) \perp (SCD)$, với E là giao điểm của SO và DH.

3.3 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

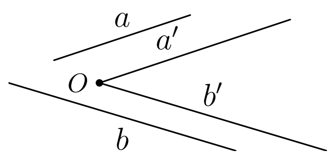
3.3.1 Tóm tắt lý thuyết

Cách xác định góc giữa hai đường thẳng

a) Chọn điểm O tùy ý.

b) Qua O kẻ hai đường thẳng a', b' sao cho $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.

c) Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b chính bằng góc giữa hai đường thẳng a', b'.

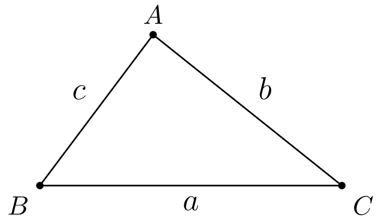


Các phương pháp tính góc

a) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác.
Xét $\triangle ABC$, đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Ta có

(a) Định lí sin $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

(b) Định lí cos $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.



b) Tính theo véc-tơ chỉ phương
Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a và b. Nếu đường thẳng a, b có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ thì $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.
Chú ý: $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

c) $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

d) Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng là $\varphi = 0^\circ$.

Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: $a' \parallel a$ và $b' \parallel b$. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b'.

3.3.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

Bài tập 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$ và $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Chứng minh MN song song với mặt phẳng $(A'C'D)$ và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và $B'C$.

Bài tập 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $CC' = m$ $(m > 0)$. Tìm m biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°.

Bài tập 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Bài tập 6. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN, AN và SD.

3.4 GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

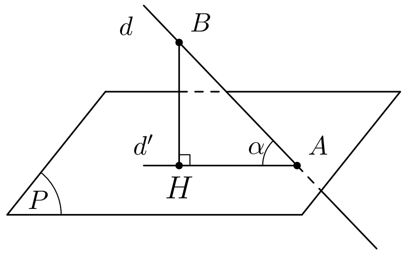
3.4.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P).
Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0° \leq \alpha \leq 90°$.

Xác định và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta làm như sau

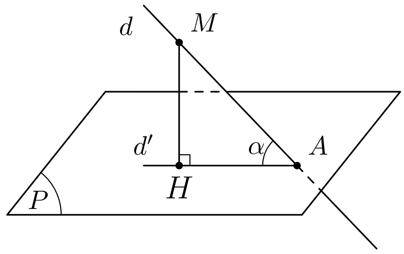
- Tìm giao điểm A của d và (P).
- Trên d chọn điểm B khác A, dựng BH vuông góc (P) tại điểm H.



Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).
Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.
Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng $BH \perp (P)$) thì ta sử dụng công thức sau đây.
Gọi α là góc giữa d và (P), suy ra

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}(M,(P))}{AM}.$$

Ta phải chọn điểm M trên d mà có thể tính được khoảng cách đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và (P).



3.4.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa

a) SC và $(ABCD)$.

b) SC và (SAB).

c) AC và (SBC).

d) SB và (SAC).

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Biết $SD = a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.

a) Chứng minh (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC và SBD là tam giác vuông.

b) Xác định góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và tạo với (P) một góc 60°. Tính góc giữa BC và (P).

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Tính SH.

b) Tính góc giữa SA và (ABC).

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD, $AB = BC = DC = a$, $DA = 2a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm SB. Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45°. Tính góc:

a) $\left(\widehat{AM,(SBD)}\right)$;

b) $\left(\widehat{AH,(ABCD)}\right)$;

c) $\left(\widehat{(SAD),(SBC)}\right)$.

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A, có đáy lớn AB, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm của AB. Góc giữa (SDC) và (ABC) là 60°. Tính:

a) $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)$;

b) $\left(\widehat{(SAD),(SMC)}\right)$;

c) Chứng minh $BC \perp (SAC)$.

Bài tập 7. Cho hình vuông ABD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh $SI \perp (ABCD)$ và tính góc hợp bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD). Từ đó tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAD).

c) Gọi J là trung điểm của CD, chứng minh $(SIJ) \perp (ABCD)$.

d) Tính góc hợp bởi SI và mặt phẳng (SDC).

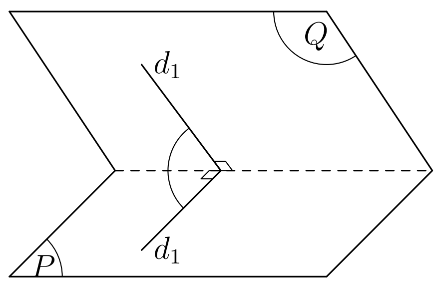
e) Xác định và tính góc hợp bởi SA và mặt phẳng (SCD).

3.5 GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

3.5.1 Tóm tắt lý thuyết

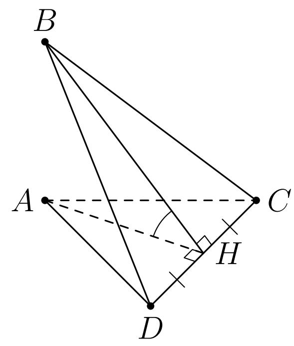
Định nghĩa 1. Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng
Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng.

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

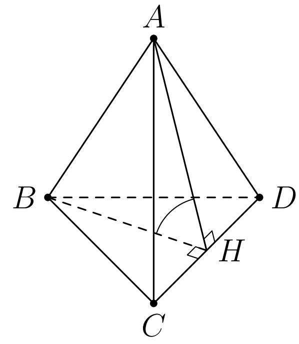


Những trường hợp đặc biệt dễ hay xảy ra:

a) **Trường hợp** 1: Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



b) **Trường hợp** 2: Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD. Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



c) **Trương hợp** 3: Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin\varphi = \frac{d\,(A,mp(Q))}{d(A,a)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

d) **Trường hợp** 4: Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$.

e) **Trường hợp** 5: Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d'.

f) **Trường hợp** 6: Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

(a) Bước 1: Xác định giao tuyến d.

(b) Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đình , dựng $AH \perp d$

(c) Bước 3: Góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

3.5.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).

Bài tập 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (BCD)$ và $AB = 3a$. Biết BCD là tam giác đều cạnh $2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a) (ACD) và (BCD).

b) (ABC) và (DBC).

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAB) và (SBC).

b) (SAD) và (SCD).

c) (SAB) và (SCD).

d) (SBC) và (SAD).

e) (SBD) và $(ABCD)$.

f) (SBD) và (SAB).

g) (SBC) và $(ABCD)$.

h) (SCD) và $(ABCD)$.

i) (SBD) và (SBC).

j) (SBC) và (SCD).

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau:

a) Góc giữa mặt bên và mặt đáy.

b) Góc giữa hai mặt bên liên tiếp.

c) Góc giữa hai mặt bên đối diện.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, dựng $AH \perp SC(H \in SC)$, gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

a) Tính góc giữa SD và (SAB).

b) Tính góc giữa (SAD) và (SMC).

c) Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$.

d) Tính góc giữa (SBC) và (SCD).

Bài tập 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy góc $60°$. Tính góc giữa các mặt phẳng:

a) (SAB) và (SCD).

b) (SAB) và (SBC).

Bài tập 7. Cho tam giác đều ABC cạnh a nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

a) Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích tam giác này.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (P).

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính góc giữa:

a) (SCD) và $(ABCD)$.

b) (SCD) và (SAD).

Bài tập 9. Cho tứ diện $S.ABC$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc nhau, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45°$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

a) Chứng minh BC vuông góc với SB.

b) Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau một góc $60°$.

Bài tập 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'.

a) Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A.

b) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Bài tập 11. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lấy hai điểm M, N thuộc CB và CD. Đặt $CM = x$, $CN = y$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A lấy một điểm S. Tìm liên hệ giữa x, y để

a) $\left(\widehat{(SAM),(SAN)}\right) = 45°$.

b) $(SAM) \perp (SMN)$.

3.6 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

3.6.1 Tóm tắt lý thuyết

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, là một dạng toán rất quan trọng trong chương vuông góc của lớp 11 và là một phần hay ra trong đề thi Đại học. Để giải quyết vấn đề này các bạn phải thành thạo hai công cụ sau và nó liên quan với nhau.

Bài toán 1. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên

Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

- **Bước 1.** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2.** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3.** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

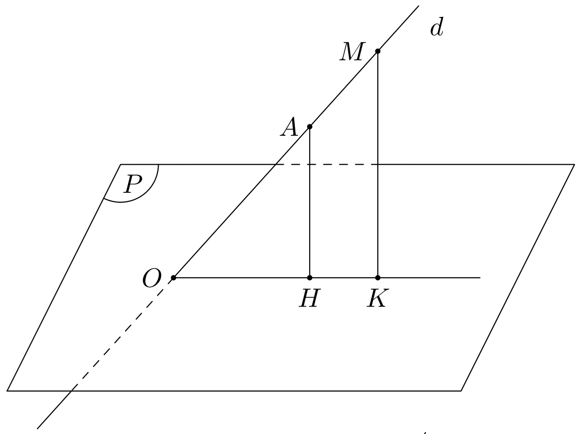
Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

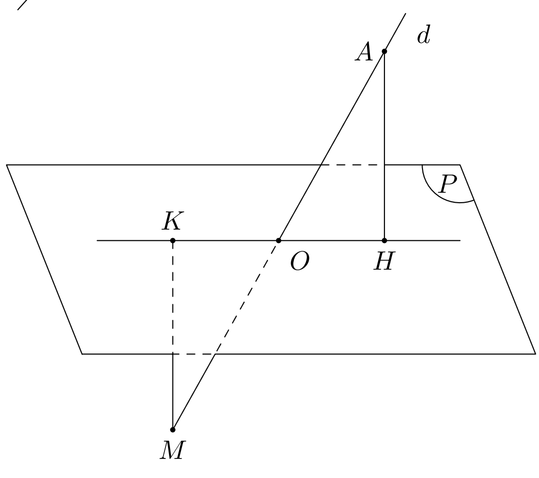
Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kì đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của Bài toán 2.

Ví dụ điển hình: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC). Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Thường sử dụng công thức sau:





Công thức tính tỉ lệ khoảng cách $\dfrac{\mathrm{d}\left(M,\mathrm{mp}(P)\right)}{\mathrm{d}\left(A,\mathrm{mp}(P)\right)} = \dfrac{MO}{AO}$.

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). Kinh nghiệm thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

3.6.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

(Dự bị Đại học khối D- 2002)

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

(Đề thi TSĐH Khối A- 2011)

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

a) Tính chiều cao của hình chóp.

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB).

Bài tập 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AB = 2a$, $SA = 4a$. Tính

a) Khoảng cách từ O đến (SAB).

b) Khoảng cách từ A đến (SCD).

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

b) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

c) Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC, trọng tâm G của tam giác SCD đến mặt phẳng (SBD).

d) Tính khoảng cách từ O, I và G đến mặt phẳng (SAB).

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính khoảng cách từ A, B đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC. Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM).

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SC và AB.

a) Chứng minh rằng $IO \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CJ.

Bài tập 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tính khoảng cách từ A tới $(A'BC)$.

c) Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

b) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

a) Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh $AI \perp (SCD)$.

b) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SBC đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của SC, CD.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

b) Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD).

c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).

Bài tập 13. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của AB dựng SH vuông góc với $(ABCD)$ với $SH = a$.

a) Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ O đến (SCD).

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, đáy là hình thang vuông tại A và B, có $AB = BC = a$, $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A,B đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi với $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $BD = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60°. Tính

a) Đường cao của hình chóp.

b) Khoảng cách từ A đến (SBC).

Bài tập 16. ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = a$.

a) Chứng minh (SAC) vuông góc với $(ABCD)$.

b) Chứng minh tam giác SAC vuông.

c) Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.

Bài tập 18. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 60°$. Dựng hai đoạn $BB' = a$, $CC' = 2a$ cùng vuông góc với mặt phẳng (P) và ở cùng một bên với (P).

a) Tính khoảng cách từ C đến (ABB').

b) Tính khoảng cách từ trung điểm của $B'C$ đến mặt phẳng (ACC').

c) Tính khoảng cách từ B' đến (ABC').

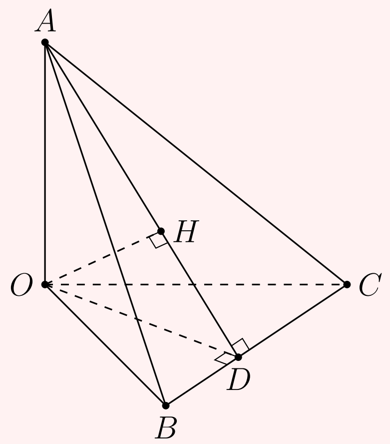
Tính khoảng cách nhờ tính chất của tứ diện vuông

Định nghĩa 1. Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông.

Trong tứ diện vuông có một tính chất đáng chú ý sau đây.
Tính chất 1. Giả sử $O.ABC$ là tứ diện vuông tại O $(OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OA)$. Khi đó đường cao OH của tứ diện $O.ABC$ được tính theo công thức

$$\boxed{\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.}$$

Chứng minh.
Dựng $OD \perp BC$ $(D \in BC)$, dựng $OH \perp AD$ $(H \in AD)$.
Ta có $BC \perp OD$ và $BC \perp OA$ nên $BC \perp (OAD)$, suy ra $(ABC) \perp (OAD)$.
Hai mặt phẳng (ABC) và (OAD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AD có $OH \perp AD$ nên suy ra $OH \perp (ABC)$.



Trong tam giác vuông OBC ta có $\dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Trong tam giác vuông OAD ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OA^2}$.

Vì vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Nhận xét 1. Sử dụng tính chất này để tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng trong nhiều trường hợp tỏ ra khá tiện lợi. Đây là công thức đẹp và cũng hay được sử dụng. Trong đề thi đại học những năm vừa qua có nhiều bài sử dụng công thức này, chúng ta lần lượt xem những bài dưới đây.

Bài tập 19. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

Bài tập 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$.

a) Tính khoảng cách từ các điểm O và A đến mặt phẳng (SBC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Bài tập 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC'.

Bài tập 22. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

b) Tính khoảng cách từ điểm M đến $(AB'C)$.

Bài tập 23. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

Bài tập 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

Bài tập 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

3.7 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

3.7.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Hai đường thẳng a và b không cùng thuộc một mặt phẳng (không có mặt phẳng nào chứa cả a và b) thì ta nói hai đường thẳng a và b chéo nhau.

Định nghĩa 2. Nếu có đường thẳng d lần lượt vuông góc với cả hai đường thẳng a và b chéo nhau lần lượt tại M và N thì đường thẳng d gọi là đường vuông góc của hai đường thẳng chéo nhau a và b, còn độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp chung để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

a) Nếu đường thẳng a thuộc một mặt phẳng (P) và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách từ đường thẳng b đến mặt phẳng (P).
Chọn một điểm M thích hợp thuộc b sao cho có thể tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) một cách dễ dàng. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

> **!** Nếu không tìm được một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia thì ta phải dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

b) Nếu đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P), đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q) mà hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa (P) và (Q).

c) Trường hợp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b với a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp ta làm như sau: Gọi I là giao điểm của đường thẳng a với mặt đáy. Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b. Khi đó b song song với mặt phẳng (P) chứa a và Δ. Chọn một điểm M trên b sao cho có thể tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) một cách dễ dàng. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

3.7.2 Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của AD,BC. Chứng minh $(SIK) \perp (SBC)$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

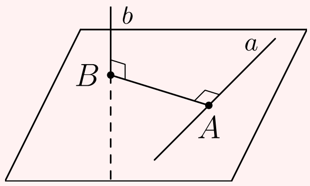
Bài tập 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ theo a.

Xác định đường vuông góc chung

Ta có các trường hợp sau đây:

a) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

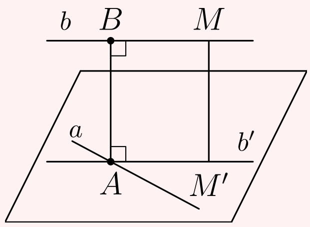
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
- Trong mặt phẳng (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa a và b.



b) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và không vuông góc với nhau.

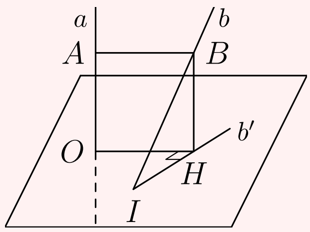
Cách 1:

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.
- Lấy điểm M tùy ý trên b, dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A. Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



Cách 2:

- Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I.
- Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên (α).
- Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b', H \in b'$.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Độ dài AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = h$ và vuông góc với đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SB và CD. b) AD và SB. c) AB và SD.

d) SC và BD. e) SC và AB. f) SC và AD

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120°$, $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SB và CD. b) BD và SC. c) SC và AB.

Bài tập 7. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc A bằng 60°, góc giữa AC' và $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Tính đường cao của hình hộp đó.

b) Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

Bài tập 8. Cho chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm giác ABC. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

Bài tập 9. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$. Đáy ABC là tam giác vuông tại B với $BA = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tìm độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SM và BC.

Bài tập 10. Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi $ABCD$ có tâm là O, cạnh a và $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại O, lấy điểm S sao cho $SB = a$. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng

a) BD và SC.

b) AB và SD.

Bài tập 11. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (SAD).

Bài tập 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh AB và CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $BM = CN = x$. Xác định vị trí điểm M sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN bằng $\dfrac{a}{3}$.

Bài tập 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{DAB} = 60^\circ$, $BB' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của điểm D trên BB' là điểm K nằm trên BB' và $BK = \dfrac{1}{4}BB'$; hình chiếu vuông góc của điểm B' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H nằm trên đoạn thẳng BD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và DC'.

Bài tập 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120^\circ$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30°. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, CC' theo a.

Bài tập 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. O là giao điểm của AC và BD, H là trung điểm của BO, $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính khoảng cách giữa AB và SC.

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$ và $SA = a$. Tính :

a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MCD) với M là trung điểm của SA.

b) Khoảng cách giữa AC và SD.

Bài tập 18. ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Bài tập 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông cạnh bằng a. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, A'C', B'C'$. Tính khoảng cách giữa DE và $A'F$.

Bài tập 20. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $(ABCD)$ là hình vuông cạnh a, gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD và AD. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $ABCD$ trùng với giao điểm của AM và BN. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và BN.

TỔNG HỢP CHƯƠNG VUÔNG GÓC

Bài tập 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên hình chóp là những tam giác vuông.

b) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

c) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB).

d) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

e) Tính $\mathrm{d}\,(A,(SCD))$.

Bài tập 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $SB \perp (ABC)$, biết $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $SB = 3a$.

a) Chứng minh $AC \perp (SBC)$.

b) Gọi BH là đường cao của tam giác SBC. Chứng minh $SA \perp BH$.

c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Bài tập 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O cạnh $AB = 2BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Góc giữa SO và mặt đáy bằng $45°$. M là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

a) Chứng minh tam giác ACH vuông.

b) Tính $\mathrm{d}\,(H,(SCD))$, $\mathrm{d}\,(M,(ACH))$, $\mathrm{d}(SO, MC)$.

Bài tập 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm H của OB. Biết góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

c) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(AA'C)$, với G là trọng tâm của tam giác $B'C'C$.

! Công thức tính tỉ lệ khoảng cách là một công thức đẹp. Các bạn nên rèn luyện nhiều bài tập để sử dụng công thức này thành thạo.

Bài tập 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC, AC và SD.

Bài tập 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, K là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng AD. Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K. Hãy tính khoảng cách này theo a.

Bài tập 27. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của cạnh $B'C'$.

a) Tính khoảng cách hai đáy.

b) Tính góc giữa BC và AC'.

c) Tính góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy.

Bài tập 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

b) Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.

c) Chứng minh BC' vuông góc với m?t phẳng $(A'B'CD)$.

d) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

f) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Bài tập 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi I, M, F lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và K là giao điểm của BI và CM.

a) Chứng minh (CMF) vuông góc với (SIB).

b) Tính BK và KF.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

Bài tập 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với đáy và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và BE.

a) Chứng minh (SOF) vuông góc (SBC).

b) Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.

d) Tính góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài tập 31. Cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD và E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD). Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Gọi G là giao điểm của CE và DF. Chứng minh $CE \perp SA$, $DF \perp SB$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB).

c) Chứng minh G là trọng tâm của tam giác SHK. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD).

d) Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CDM).

Bài tập 32. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.

c) Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (α). Tính $\sin\varphi$.

Bài tập 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Gọi E, F là trung điểm của AB và CD.

a) Cho biết tam giác SCD vuông cân tại S. Chứng minh: $SE \perp (SCD)$ và $SF \perp (SAB)$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên EF. Chứng minh: $SH \perp AC$.

c) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

Bài tập 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$; $(SCD) \perp (SAD)$.

b) Tính góc giữa SD và $(ABCD)$, SB và (SAD), SB và (SAC).

c) Tính $\mathrm{d}(A,(SCD))$, $\mathrm{d}(B,(SAC))$.

Bài tập 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, góc $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$, hai mặt bên (SAB) và (SBC) vuông góc với đáy; $SB = 2a$. Hạ $BH \perp SA$ $(H \in SA)$; $BK \perp SC$ $(K \in SC)$.

a) Chứng minh $SB \perp (ABC)$.

b) Chứng minh $SC \perp (BHK)$.

c) Chứng minh tam giác BHK vuông.

d) Tính cô-sin của góc tạo bởi SA và (BHK).

Bài tập 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, và M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh $(MBD) \perp (SAC)$.

b) Tính góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

d) Tính góc giữa giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

Bài tập 37. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

c) Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Bài tập 38. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

a) Chứng minh $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.

b) Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trên mặt phẳng. Từ đó chứng minh $C'D'$ luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.

c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $SA = a\sqrt{2}$.